Induksi Matematika

(Bagian 1)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika STEI - ITB

Pendahuluan

- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah **induksi matematik**.

- Contoh:

  1. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$.

  2. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh-contoh lainnya:

1. Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan!

2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3. Buktikan!

3. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n – 1)/2$. Buktikan!

4. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n

5. Untuk membayar biaya pos sebesar n *sen* ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen saja. Buktikan!

- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

- Tanpa induksi matematik, kita tentu membuktikannya dengan mencoba semua bilangan bulat. Ini jelas tidak mungkin.

Contoh: Buktikan bahwa jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Jika dibuktikan dengan semua nilai n, maka langkahnya sbb:

$n = 1 \rightarrow 1 = 1^2$ (benar)

$n = 2 \rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2$ (benar)

$n = 3 \rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ (benar)

$n = 4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ (benar)

…

- Berapa banyak nilai *n* yang harus dicoba untuk pembuktian?
- Nilai *n* tak berhingga banyaknya, apakah harus dicoba semua? Jelas tidak mungkin
- Solusi pembuktian: gunakan induksi matematika!

Prinsip Induksi Sederhana.

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

  1. $p(1)$ benar, dan
  2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.

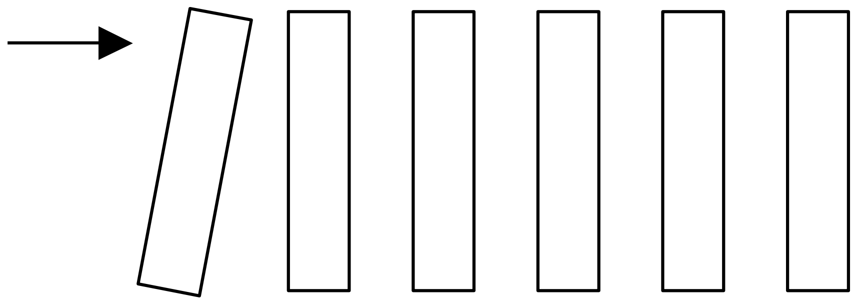
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.

- Bila kita sudah bisa menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.



- Untuk merobohkan semua domino, cukup mendorong domino pertama. Domino pertama akan mendorong domino kedua. Domino kedua akan mendorong domino ketiga, demikian seterusnya.

Sumber:
http://www.chuckgallagher.com/small-choices-matter-the-domino-effect-in-choices/

Contoh pembuktian pertama

Contoh 1: Buktikan bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$.

<u>Penyelesaian</u>: Misalkan $p(n)$ menyatakan proposisi bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n (n + 1) /2$, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n (n + 1) /2$$

Kita harus membuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

$p(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)\,/2$

Basis induksi: $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$ kita peroleh

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\,(1 + 1) / 2 \\
&= 1\,(2) / 2 \\
&= 2/2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = (n + 1)[(n + 1) + 1]/2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}, \text{menurut hipotesis}} + (n + 1)$$

$$= [n\,(n + 1)/2\,] + (n + 1)$$

$$= (n + 1)\,[\,n/2 + 1]$$

$$= (n + 1) + [\,n/2 + 2/2]$$

$$= (n + 1)\,(n + 2)/2$$

$$= (n + 1)\,[\,(n + 1) + 1]/2$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa untuk semua bilangan bulat positif n, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)/2$. ■

Contoh 2. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1 = 1^2$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2. ■

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

- Prinsip induksi sederhana hanya bisa dipakai untuk n $\geq$ 1.
- Untuk sembarang n $\geq n_0$ kita menggunakan prinsip induksi yang dirampatkan (*generalized induction principle*).

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

  1. $p(n_0)$ benar, dan

  2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh 3. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$$= 2^1 - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1) + 1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \qquad \text{(hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1) + 1} - 1
\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ■

Contoh 4. Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi: U*ntuk $n = 1$, maka $1^3 + 2(1) = 3$ adalah kelipatan 3. Jadi p(1) benar.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (hipotesis induksi).

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ adalah kelipatan 3.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)\\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa:

- $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi)
- $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3
- maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3
- sehingga $(n^3 + 2n)+3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3. ■

Latihan 1

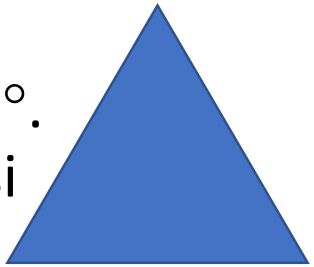
- Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)^{\circ}$. Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)^\circ$. Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

Jawaban Latihan 1

(i) Basis

Untuk nilai $n = 3$, poligon akan berbentuk segitiga dengan jumlah sudut 180°. Jumlah sisi sebanyak 3 sehingga $180(3 - 2) = 180^\circ$. Jadi untuk $n = 3$ proposisi benar



(ii) Langkah induksi

Asumsikan bahwa jumlah sudut dalam poligon dengan n sisi yaitu $180(n - 2)^\circ$ adalah benar (hipotesis induksi).

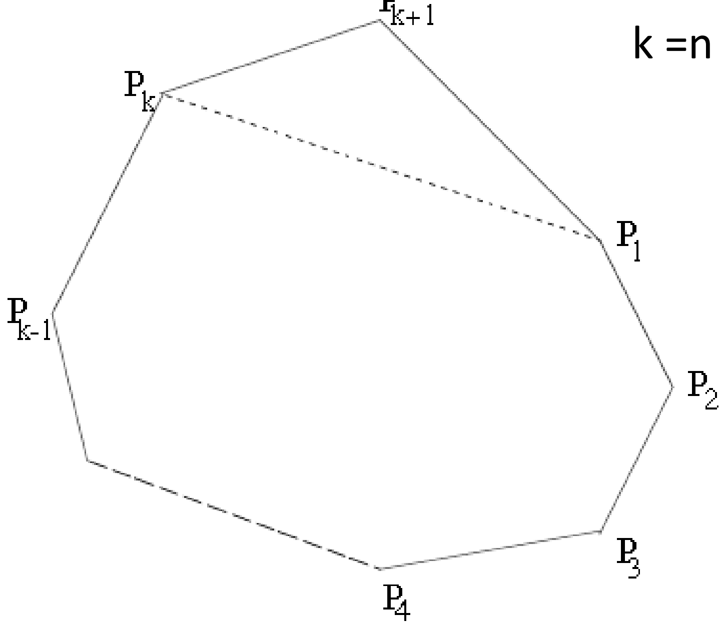
Kita ingin menunjukkan bahwa jumlah sudut poligon yang memiliki n+1 sisi adalah $180((n + 1) - 2)^\circ = 180\,(n - 1)^\circ$.

- Pada gambar di samping dapat ditunjukkan bahwa untuk $k = n$ terdapat dua bagian yaitu segitiga $P_1P_kP_{k+1}$ dan poligon dengan k sisi

  Jumlah sudut di dalam poligon n sisi menurut hipotesis induksi adalah $180(n - 2)°$ dan jumlah sudut di dalam segitiga adalah $180°$.

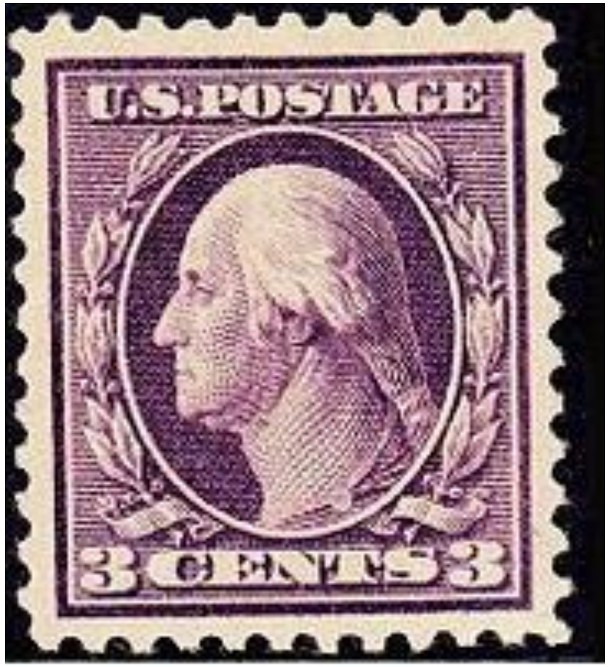
  Jadi jumlah sudut dalam dari poligon dengan

  $n + 1$ sisi yaitu $180(n - 2)° + 180° = 180(n - 1)°$.



- Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar. ■

Contoh 5. Di kantor pos tersedia perangko 3 sen dan 5 sen. Biaya pos pengiriman surat menggunakan kedua perangko tersebut. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar *n* sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen perangko 5 sen saja" adalah benar.



Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk membayar biaya pos sebesar 8 sen dapat digunakan satu buah perangko 3 sen dan satu buah perangko 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) Langkah induksi. Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen perangko 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

- Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko senilai 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen maka akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen.

- Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai n sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan dua buah perangko 5 sen akan dihasilkan nilai perangko $n + 1$ sen.

Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar. ■

Latihan 2

Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai Rp4 dan Rp5? Buktikan jawabanmu dengan prinsip induksi matematik.

Latihan 3

Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000 dan Rp50.000.

Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Latihan 4

Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

Latihan 5

Jika A_1, A_2, …, A_n masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

Latihan 6

Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n-1)/2$.

Latihan 7

Perlihatkan bahwa $[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n]$ adalah tautologi bilamana p_1, p_2, …, p_n adalah proposisi.

Latihan 8

Misalkan ada sejumlah n ganjil orang ($n > 1$) yang berkumpul di sebuah lapangan, di sini mereka masing-masing memegang sebuah kue *pie* yang siap dilemparkan ke orang lain yang paling dekat dengannya. Jarak antar orang berbeda (tidak ada jarak antar pasangan yang sama). Jika semua orang harus melempar kue dengan simultan(bersamaan), buktikan bahwa minimal ada satu orang yang tidak terkena lemparan kue.

Penyelesaian Latihan 8:

(i) Basis: Untuk n = 3,ada tiga orang A,B dan C maka akan ada 1 pasang orang dengan jarak terpendek, sebut saja sehingga pasangan tersebut A dan B saling melempar kue satu sama lain, akibatnya C tidak akan kena lemparan kue, C akan melempar salah satu dari A atau B, tergantung yang paling dekat dengan C.

(ii) Langkah induksi: Karena n ganjil, misalkan untuk $n = 2k+1$ orang minimal ada satu orang yang tidak kena lemparan (hipotesis induksi), maka akan ditunjukkan bahwa untuk $n + 1 = 2(k+1)+1 = 2k + 3$ orang juga terdapat minimal 1 orang yang tidak kena lemparan *pie*.

Buktinya sebagai berikut. Misalkan diantara $2k+3$ orang, A dan B adalah pasangan terdekat(jadi mereka melempar satu sama lain), di sini akan dibagi menjadi dua kasus:

- Jika diantara $2k+1$ orang tersisa ada minimal satu orang yang melempar pie ke A atau B, maka akan ada maksimal $(2k+3) – 3$ pie yang dilempar ke $2k+1$ orang, artinya ada $(2k+3) – 3 = 2k$ kue *pie* yang dilempar ke $2k+1$ orang, sehingga ada 1 orang yang tidak terlempar kue *pie*.

- Jika diantara $2k+1$ sisa orang tidak ada yang melempar kue *pie* ke A dan B, maka masalah selesai (dari hipotesis induksi 2k+1).